1 Mathematische Module von Zufallsexperimenten

1.1 Grundbegriffe

Grundraum:	nicht leere Menge $\Omega \neq \emptyset$ Enthällt alle möglichen Ergebnisse eines Zufallsexperimentes.
Ereignis:	Teilmenge $A \subset \Omega$ Nicht immer wird jede Teilmenge als Ergebnis bezeichnet, sondern nur Mengen aus einem Mengensystem $\mathcal{A} \subset 2^{\Omega}$ Sprechweise: Ereignis A tritt ein $\Leftrightarrow$ Ereignis ω liegt in A
Elementarereignis:	$\omega \in \Omega$ Vorsicht!: ω ist kein Ereignis! Aber ω ist ein Ereignis, falls $\mathcal{A}$ geeignet ist.

Beispiel 1.1.

(i) *Werfen eines Würfels*
$\Omega = 1, ..., 6$
Ereignis "Augenzahl ist gerade" A = *2,4,6*

(ii) *In einem Netzwerk werden Längen (in Byte) der ersten* $n = 10^5$ *Pakete beobachtet*
$\Omega = \mathbb{N}^5 = \{(\omega_1, ..., \omega_n) | w_i \in (N)\}$
Interpretation: ω = *Länge des i-ten Paketes*
Ereignis "Das größte Paket umfasst maximal 10^7 *Byte"*
$A := (\omega_1, ..., \omega_n) \mid w_i \leq 10^7 \forall_i 1 \leq i \leq n$

"Rechnen mit Ereignissen"

Seien $A, B \subset \Omega$ Ereignisse. Dann ist

- $A \cup B = \{\omega \in \Omega \mid \omega \in A oder \omega \in B\}$
  Ereignis, dass A eintritt oder B eintritt
- $A \cap B = \{\omega \in \Omega \mid \omega \in A und \omega \in B\}$
  Ereignis, dass A und B eintritt
- $A \setminus B = \{\omega \in \Omega \mid \omega \in A, \omega \notin B\}$ Ereignis, dass A eintritt, aber nicht B

- $A \subset B$
  Wenn A eintritt, dann tritt auch B ein.

Im Wahrscheinlichkeitsmodell soll jedem Ereignis eine Wahrscheinlichkeit (W.) zugeordnet werden.
Diese müssen ßueinander passen".
z.B. muss bei $A \subset B$ die Wahrscheinlichkeit von A $\leq$ Wahrscheinlichkeit von B sein (Monotonie)

Mathematisch:	Abbildung	$P : \mathcal{A} \to \mathbb{R}$	
	mit Normierung	$P(\emptyset) = 0$	Ereignis, dass nie eintritt hat W. 0
		$P(\Omega) = 1$	Ereignis, dass immer eintritt hat W. 1
		$\rightsquigarrow P : \mathcal{A} \to [0, 1]$	

Welche Abb. P sind sinnvoll?

$\rightarrow$ Folien "1. Ansatz: Inhaltlicher Zusammenhang"
bis "Subjektivistische" ...

Axiomatischer Zugang - Kolmogovou (1933)

Fordere Eigenschaften von P
Zur Motivation: Für die relativen Häufigkeiten "empirische Wahrscheinlichkeiten" gilt
$P_n(\Omega) = 1, P_n\emptyset = 0$
$A, B, disjunkt(A \cap B = \emptyset) \Rightarrow P_n(A \cup B) = P_n(A) + P_n(B)$
Induktiv folgt: Ereignisse $A_1, ..., A_k$ disjunkt $\Rightarrow P_n(\bigcup\limits_{i=1}^{k}) = \sum\limits_{i=1}^{k} P_n(A_i)$

1.2 endl. Wahrscheinlichkeitsraum & Wahrscheinlichkeitsmaß

Definition 1.2 (endl. Wahrscheinlichkeitsraum & Wahrscheinlichkeitsmaß)**.** *Ein endlicher Wahrscheinlichkeitsraum ist ein Paar (Ω, P) bestehend aus einem endlichen Grundraum $\Omega \neq \emptyset$ und einer Abbildung $P : 2^\Omega \to [0, 1]$ mit den Eigenschaften:*

- $P(\Omega) = 1$
- $A, B \subset \Omega disjunkt \Rightarrow P(A \cup B) = P(A) + P(B)$ *(Additiviannahme)*

P heißt dann Wahrscheinlichkeitsmaß.

Beispiel 1.3.

(i) *vgl. Beispiel 1.1.(i) einmaliges Werfen eines Fairen Würfels*
Ω *= 1,...,6*
$A \subset \Omega : P(A) = \frac{|A|}{|\Omega|} = \frac{|A|}{6}$
insbesondere P(w) $= \frac{1}{6}$

(ii) *Werfen zweier unterscheidbarer fairer Würfel*
$\Omega = \{(\omega_1, \omega_2) \mid \omega_1, \omega_2 \in \{1, ..., 6\}, \omega_1 \leq \omega_2\}$
Hier ist es <u>*nicht*</u> *sinnvoll jeder Menge* (ω_1, ω_2) *die gleiche Wahrscheinlichkeit zuzuweisen, denn z.B. gibt es 2 Möglichkeiten (1,2) zu erhalten, aber nur eine für (1,1).*

$\rightsquigarrow P(\{\omega_1, \omega_2\}) = \begin{cases} \frac{1}{36}, \omega_1 = \omega_2 \\ \frac{2}{36}, \omega_1 \neq \omega_2 \end{cases}$

Für $A \subset \Omega$ *folgt*

$P(A) = \sum\limits_{\omega \in A} P(\{\omega\})$

Satz 1.4. *Sei* (Ω, P) *ein endlicher Wahrscheinlichkeitsraum, dann gilt*

(i) $P(\emptyset) = 0$

(ii) $A_1, ..., A_k \subset \Omega$ *disjunkt* $\Rightarrow P(\bigcup\limits_{i=1}^{k} A_i) = \sum\limits_{i=1}^{k} P(A_i)$

(iii) $P(A^c) = 1 - P(a) \ \forall A \subset \Omega$

(iv) $A \subset B \subset \Omega \Rightarrow P(B \setminus A) = P(B) - P(A)$

(v) $A, B \subset \Omega \Rightarrow P(A \cup B) = P(A) + P(B) - P(A \cap B)$

(vi) $\forall A_1, ..., A_k \subset \Omega \Rightarrow P(\bigcup\limits_{i=1}^{k} A_i) \leq \sum\limits_{i=1}^{k} P(A_i)$

Beweis: (i) - (v) Übungen

(vi) Def. $B_1 := A_1, B_i := A_i \setminus \left(\bigcup\limits_{j=1}^{i-1} A_j \right) \subset A_i \ \forall 2 \leq i \leq k$
$\Rightarrow B_1, ..., B_2$ disjunkt (denn für $i < l, B_i \subset A_i, A_i \cap B_l$)
$\bigcup\limits_{i=1}^{k} B_i = \bigcup\limits_{i=1}^{k} A_i$

$\Rightarrow P(\bigcup\limits_{i=1}^{k} A_i) = P(\bigcup\limits_{i=1}^{k} B_i) \stackrel{ii}{=} \sum\limits_{i=1}^{k} P(B_i) \leq P(A_i)$
(Ist $\omega \in A_i$ für ein i und ist i_ω das <u>kleinste</u> solche i, dann ist $\omega \in B_{i_\omega}$)

Definition 1.5 (Gleichverteilung oder Laplace-Verteilung)**.** *Ist Ω endlich, so heißt das durch*
$P(A) = \frac{|A|}{|\Omega|}, A \subset \Omega,$
definierte Wahrscheinlichkeitsmaß die Gleichverteilung oder Laplace-Verteilung auf Ω

1.3 Urnenmodelle

Wenn Gleichverteilung betrachtet wird, sind nur Mächtigkeiten von Mengen zu bestimmen.

Oft hilfreich sind Urnenmodelle

Situationen

Es sind die Kugeln 1,...,n in der Urne und es wird k-maliges Ziehen aus der Urne betrachtet.

Es wird unterschieden, ob

- mit oder ohne Zurücklegen gezogen wird
- mit oder ohne Berücksichtigung der Reihenfolge gezogen wird

1.3 (a) **Ziehen mit Zurücklegen und mit Berücksichtigung der Reihenfolge**

Grundraum	Ω_a	$= \{1, ..., n\}^k = \{(\omega_1, ..., \omega_k) \mid \omega_i \in \{1, ..., n\}\}$
Interpretation:	ω	$=(\omega_1, ..., \omega_k) \in \Omega_a$
		$\widehat{=}$ im i-ten Zug werde Kugel ω_i gezogen

$|\Omega_a| = n^k$

1.3 (b) **Ziehen ohne Zurücklegen, aber mit Berücksichtigung der Reihenfolge**

$\Omega_b = \{(\omega_1, ..., \omega_n) \in \Omega_a \mid \omega_i \neq \omega_j \forall 1 \leq i < j \leq k\}$

Interpretation wie bei a, $|\Omega_b| = n \cdot (n-1) \cdot ... \cdot (n-k+1) = \frac{N!}{(n-k)!}$

Begründung:	n Möglichkeiten für ω_1
dann	n-1 Möglichkeiten für ω_2 bei gegebenen ω_1
dann	n-2 Möglichkeiten für ω_3 bei gegebenen ω_1, ω_2
...	...
dann	n-k+1 Möglichkeiten für ω_k bei gegebenen $\omega_1, ..., \omega_{k-1}$

1.3 (c) **Ziehen <u>ohne</u> Zurücklegen und <u>ohne</u> Berücksichtigung der Reihenfolge**
Ordne gezogene Kugelnummern nach Größe

$\Omega_c = \{(\omega_1, ..., \omega_k) \in \Omega_a \mid \omega_1 < \omega_2 < ... < \omega_3\}$

Es gibt zu jedem $(\omega_1, ..., \omega_k) \in \Omega$ genau $k!$ verschiedene Möglichkeiten die k verschiedenen Kugelnummern anzuordnen.

D.h. jedem $\omega \in \Omega_c$ entsprechen $k!$ Elemente aus Ω_b

$\Rightarrow |\Omega_c| = \frac{|\Omega_b|}{k!} = \frac{n!}{k!(n-k)!} =: \binom{n}{k}$

1.3 (d) **Ziehen <u>mit</u> Zurücklegen und <u>ohne</u> Berücksichtigung der Reihenfolge**
$\Omega_d = \{(\omega_1, ..., \omega_k) \in \Omega_a \mid \omega_1 \leq \omega_2 \leq ... \leq \omega_k\}$
Die Abbildung

$S : \Omega_d \to \{(\tilde{\omega}_1, ..., \tilde{\omega}_k) \in \{1, ..., n+k-1\}^k \mid \tilde{\omega}_1 < \tilde{\omega}_2 < ... < \tilde{\omega}_k\} =: \widetilde{\Omega}_c$

$S(\omega_1, ..., \omega_k) := (\omega_1, \omega_2 + 1, \omega_3 + 2, ..., \omega_k + k + 1)$

ist eine Bijektion.

$\tilde{\Omega}_c$ ist vom gleichen Typ wie Ω_c mit n ersetzt durch n + k - 1.

Also $|\Omega_d| = |\tilde{\Omega}_c| \overset{(c)}{=} \binom{n+k-1}{n}$

Beispiel 1.6. *(i) Lotto 6 aus 49*
6 Kugeln werden ohne Zrücklegen und ohne Berücksichtigung der Reihenfolge aus 49 Kugeln gezogen

$\overset{1.3(c)}{\Rightarrow}$ *Es gibt* $\binom{49}{6} = 13.983.816$ *Möglichkeiten*

Alle Möglichkeiten gleichverteilt

$\Rightarrow$ *Gewinn für ein Los* $\frac{1}{\binom{49}{6}} \approx 7,15 \cdot 10^{-8}$

(ii) Suche bei Yahoo nach Schlagwörtern "Hausdepp Kartenspiel"gibt es unter den ersten 10 Links genau einen, unter dem die Regeln zu finden sind. Angenommen die Nummern dieser Links sei gleich verteilt auf 1,...,10.

Sie Probieren Links zufällig durch.

Wie groß ist die Wahrscheinlichkeit, dass Sie genau k Versuche brauchen.

$\rightsquigarrow$ *Ziehen ohne Zurücklegen und mit Berücksichtigung der Reihenfolge*

$\Omega = \{(\omega_1, ..., \omega_k) \in \{1, ..., 10\}^k \mid w_i \neq \omega_j \forall i \neq j\}$

Ergebnis "Erfolg nach genau k Versuchen"

$A = \{(\omega_1, ..., \omega_{k-1}, \gamma) \mid \omega_i \in \{1, ..., 10\} \setminus \{\gamma\} \forall 1 \leq i \leq k-1\}$
entspricht 9-maligem Ziehen ohne Zurücklegen auf $\{1, ..., 10\} \setminus \{\gamma\}$

$\Rightarrow |A| = \frac{9!}{(9-(k-1))!}$

$|\Omega| = \frac{10!}{(10-k)!}$

Bei Gleichverteilung

$P(A) = \frac{|A|}{lvert\Omega|} = \frac{9!}{10!} = \frac{1}{10}$

Bei 2 richtigen Links analog

$|A| = \frac{8!}{(8-(k-1))!}$

$|\Omega| = \frac{10!}{(10-k)!}$

$P(A) = \frac{|A|}{lvert\Omega|} = \frac{8! \cdot (10-k)}{10!} = \frac{10-k}{10 \cdot 9}$

Liegt wie z.B. im Beispiel 1.1(ii) kein <u>endlicher</u>, sondern <u>abzählbarer</u> Grundraum vor, dann ist die Additivannahme nicht mehr ausreichend.

Definition 1.7 (diskretes Wahrscheinlichkeitsmaß & -raum)**.** *Sei $\Omega \neq \emptyset$ eine beliebige nicht-leere Menge.*
Eine Abbildung $P : 2^\Omega \to [0, 1]$ <u>diskretes Wahrscheinlichkeitsmaß</u>, falls

(i) $P(\Omega) = 1$

(ii) $\forall A_n \subset \Omega$, $n \in \mathbb{N}$ *disjunkt:* $P(\bigcup\limits_{n \in \mathbb{N}} A_n) = \sum\limits_{n \in \mathbb{N}} P(A_n)$ *(" σ-additivität ")*

(iii) Und eine Abzählbare Menge $\Omega_0 \subset \Omega$ mit $P(\Omega) = 1$.

Dann heißt (Ω, P) <u>diskreter Wahrscheinlichkeitsraum</u>.

Satz 1.4 gilt völlig analog auch für diskrete Wahrscheinlichkeitsräume.
Es gilt sogar in Verallgemeinerung von 1.4(vi)

Satz 1.8. *Sei (Ω, P) ein diskreter Wahrscheinlichkeitsraum $A_n \subset \Omega \forall n \in \mathbb{N}$*
Dann $P(\bigcup\limits_{n \in \mathbb{N}} A_n) \leq \sum\limits_{n \in \mathbb{N}} P(A_n)$ *("σ-subadditivität")*

Satz & Definition 1.9.

(i) *Sei (Ω, P) ein diskreter Wahrscheinlichkeitsraum.*
Dann heißt die Funktion $f : \Omega \to [0,1], f(\omega) = P(\{\omega\})$ Zähldichte oder Wahrscheinlichkeitsfunktion von P.
Sie besitzt folgende Eigenschaften:

(a) $\Omega_T := \{\omega \in \Omega \mid f(\omega) > 0\}$ *ist abzählbarer Träger von P bzw. von f*

(b) $\sum\limits_{\omega \in \Omega} f(\omega) = 1$

Für alle $A \subset \Omega$:

$$P(A) = \sum_{\omega \in A} f(\omega) = \sum_{\omega \in A \cap \Omega_T} f(\omega) \tag{1.1}$$

(ii) *Ist umgekehrt $\Omega \neq \emptyset$ und $f : \Omega \to [0,1]$ eine Funktion, die (1a) und (1b) erfüllt, so existiert genau ein diskretes Wahrscheinlichkeitsmaß auf Ω, das f zu Zähldichte hat.*

Beweis:

(i) $\exists \Omega_0 \subset \Omega$ abzählbar, $P(\Omega_0) = 1$
$\Rightarrow P({\Omega_0}^c) = 0$
$\Rightarrow \forall \omega \in {\Omega_0}^c : f(\omega) = P(\omega) \leq P({\Omega_0}^c) = 0$
$\Rightarrow \Omega_T \subset \Omega_0 \Rightarrow \Omega_T$ abzählbar, d.h. (1a).
(1b) ist Spezialfall von (1.1)
(1.1) folgt aus der σ-Additivität von P
denn

$$P(A) = P(A \cap \Omega_T) + P(A \cap {\Omega_T}^c)$$
$$P(A \cap \Omega_T)$$
$$P\Big(\bigcup_{\omega \in A \cap \Omega_T} \omega\Big)$$
$$\sum_{\omega \in A \cap \Omega_T} P(\omega) = \sum_{\omega \in A \cap \Omega_T} f(\omega) = \sum_{\omega \in A} f(\omega)$$

da $f(\omega) = 0 \forall \omega \notin \Omega_T$

(ii) Def. $P(A)$ gemäß (1.1) für alle $A \subset \Omega$
Dann ist P ein diskretes Wahrscheinlichkeitsmaß, denn

- $P(\Omega) \overset{(1.1)}{=} \sum\limits_{\omega \in \Omega} f(\omega) \overset{(1b)}{=} 1$
- $A_n \subset \Omega, n \in \mathbb{N}, disjunkt$
  $\Rightarrow P(\bigcup\limits_{n \in \mathbb{N}} A_n) \widehat{=} \sum\limits_{\omega \in \underset{n \in \mathbb{N}}{\bigcup_n} A} f(\omega) = \sum\limits_{n \in \mathbb{N}} \sum\limits_{\omega \in A_n} f(\omega) \overset{(1.1)}{=} \sum\limits_{n \in \mathbb{N}} P(A_n)$

- $P(\Omega_T) \overset{(1.1)}{=} \sum\limits_{\omega \in \Omega_T} f(\omega) = \sum\limits_{\omega \in \Omega} f(\omega) \overset{(1b)}{=} 1$
  und Ω_T ist abzählbar nach (1a)

Also ist P diskretes Wahrscheinlichkeitsmaß mit $P(\{\omega\}) \overset{(1.1)}{=} f(\omega)$ d.h. f ist Zähldichte von P. Dass P das einzige diskrete Wahrscheinlichkeitsmaß mit diesen Eigenschaften ist, folgt aus (1.1).

Beispiel 1.10.

(i) *Sei* $p \in [0,1]$
$1 = (p + (1-p))^n = \sum\limits_{k=0}^{n} \binom{n}{k} p^k \cdot (1-p)^{n-k} =: f(k)$

def. Funktion $f : 0, ..., n =: \Omega \to [0,1]$
die (1a) und (1a) erfüllt, d.h. Zähldichte eines diskreten Wahrscheinlichkeitsmaßes auf Ω *ist:*
Binomialverteilung $\mathcal{B}_{(n.p)}$
d.h. $\mathcal{B}_{(n,p)}(k) = \binom{n}{p} p^k \cdot (1-p)^{n-k} \quad \forall k \in \Omega$

Später: $\mathcal{B}_{(n,p)}$ *beschreibt zufällige Anzahl der Erfolge bei n-maliger unabhängiger Durchführung eines Zufallsexperiments mit Erfolgswahrscheinlichkeit p.*

(ii) *Frage : Wie groß ist die Wahrscheinlichkeit, dass man k mal würfeln muss, bevor das erste Mal 6 gewürfelt wird?*

Bei fairem Würfel:
Wahrscheinlichkeit k-mal keine 6 zu würfeln $= \left(\frac{5}{6}\right)^k$
Wahrscheinlichkeit beim (k+1)- Mal 6 zu würfeln $= \left(\frac{1}{6}\right)$
$\Rightarrow gesuchteWahrscheinlichkeit = \left(\frac{5}{6}\right)^k \cdot \frac{1}{6} \qquad \forall k \in \mathbb{N}_0$

Allgemein: Für $p \in (0,1]$ *definiert*
$f(k) = (1-p)^k \cdot p$

Zähldichte, denn $\mathbb{N}_0$*, abzählbar und*
$\sum\limits_{k \in \mathbb{N}_0} f(k) = p \cdot \sum\limits_{n \in \mathbb{N}_0} (1-p)^k \overset{geometrischeReihe}{=} p \cdot \frac{1}{1-(1-p)} = 1$

Zugehöriges Wahrscheinlichkeitsmaß: geometrische Verteilung $\mathcal{G}_p$
beschreibt die Misserfolge bis zum ersten Erfolg bei unabhängiger Durchführung eines Zufallsexperiments mit Erfolgswahrscheinlichkeit p.

2 Bedingte Wahrscheinlichkeiten und Unabhängigkeit

Gesucht: Wahrscheinlichkeit, dass Ereignis A eintritt, wenn bekannt ist, dass Ereignis B eintritt/eintreten wird.

Experiment wird n mal durchgeführt
n_A Anzahl der Experimente, bei denen A eintritt
n_B Anzahl der Experimente, bei denen B eintritt $n_{A\cap B}$ Anzahl der Experimente, bei denen A und B eintreten

empirisches Gesetzt der großen Zahlen:
Für "große" n
$\frac{n_A}{n} \approx P(A), \frac{n_B}{n} \approx P(B), \frac{n_{A\cap B}}{n} \approx P(A \cap B)$

Zur Bestimmung obriger Wahrscheinlichkeit betrachtet man <u>nur</u> Experimente, bei denen B eingetreten ist.
$\rightsquigarrow \frac{n_{A\cap B}}{n_B} = \frac{\frac{A\cap B}{n}}{\frac{n_B}{n}} \approx \frac{P(A\cap B)}{P(B)}$, falls der Nenner > 0.

Definition 2.1. *bedingte Wahrscheinlichkeit von A gegeben B Sei (Ω, P) diskreter Wahrscheinlichkeitsraum, $B \subset \Omega$ mit $P(B) > 0, A \subset \Omega$, dann heißt*
$P(A \mid B) = \frac{P(A\cap B)}{P(B)}$
<u>bedingte Wahrscheinlichkeit von A gegeben B</u>

Beispiel 2.2. *(vergleich Präsentsübungsblatt 2, A3)*
Beim Skatspiel hat Spieler 1 keinen buben erhalten.
Wie groß ist <u>dann</u> die Wahrscheinlichkeit, dass Spieler 2 oder 3 alle 4 Buben erhalten hat?
<u>Modell</u>: $\Omega = \{(\underbrace{\omega_1, ..., \omega_{10}}_{Sp.1Karten}, \underbrace{\omega_{11}, ..., \omega_{20}}_{Sp.2Karten}, \underbrace{\omega_{21}, ..., \omega_{30}}_{Sp.3Karten}, \underbrace{\omega_{30}, \omega_{32}}_{Stock},) \in K^{32} \mid \omega_i \neq \omega_j \ \forall i \neq j\}$
mit $K = \{KreuzAs, PikAs, ..., Karo7\}$
P Laplace-Verteilung
$C = \{\omega \in \Omega \mid \{\omega_1, ..., \omega_2\} \cap \{KreuzBube, PikBube, HerzBube, KaroBube\} = \emptyset\}$
Ergebnis, dass Spieler 1 keine buben erhällt.
$B_2 = \{\omega \in \Omega \mid \{KreuzBube, PikBube, HerzBube, KaroBube\} \subset \{\omega_{11}, ..., \omega_{20}\}\}$
Ergebnis, dass Spieler 2 alle Buben erhält.

B_3 analog
Ergebnis, dass Spieler 3 alle Buben erhällt.

$\rightarrow B_2 \cap B_3 = \emptyset, B_2 \cup B_3 \subset C$

$$|C| = \underbrace{\frac{28!}{18!}}_{1} \cdot \underbrace{22!}_{2}$$

[1]*: Anzahl der Möglichkeiten 10 Karten für Spieler 1 aus 28 "Nicht-Buben" zu ziehen (siehe 1.3(b)*
[2]*: Anzahl, die restlichen 22 Karten zu verteilen.*

$|B_2|$ & $|B_3|$ in Präsentzaufgaben.

Gesuchte Wahrscheinlichkeit:

$$\begin{aligned} P(B_2 \cup B_2 \mid C) &\overset{2.1}{=} \frac{P((B_2 \cup B_3) \cap C)}{P(C)} \\ &= \frac{P(B_2) + P(B_3)}{P(C)} \\ &= \frac{\frac{|B_2|}{|\Omega|} + \frac{|B_3|}{|\Omega|}}{\frac{|C|}{|\Omega|}} = \frac{|B_2| + |B_3|}{|C|} = \frac{2 \cdot |B_2|}{|C|} \underset{\cdots}{=}^{Praesentz} = \frac{12}{209} \approx 0,057 \end{aligned}$$

Satz 2.3 (totale Wahrscheinlichkeit & Bayes)**.** *Sei (Ω, P) diskreter Wahrscheinlichkeitsraum, $B_i \subset \Omega (i \in I)$ disjunkt, $\bigcup_{i \in I} B_i = \Omega$, I (höchstens) abzählbar und $P(B_i) > 0, A \subset \Omega$*

(i) *Satz von der totalen Wahrscheinlichkeit*

$$P(A) = \sum_{i \in I} P(A \mid B_i) \cdot P(B_i)$$

(ii) *Satz von Bayes*

Falls $P(A) > 0, k \in I$, dann

$$P(B_k \mid A) = \frac{P(A \mid B_k) \cdot P(B_k)}{\sum_{i \in I} P(A \mid B_i) \cdot P(B_i)}$$

Beweis:

(i) $\sum_{i \in I} P(A \mid B_i) \cdot P(B_i) = \sum_{i \in I} \frac{P(A \cap B)}{P(B_i)} \cdot P(B_i) = P(\bigcup_{i \in I} P(A \cap B_i)) = P(A)$
, da $A \cap B_i$ disjunkt.

(ii) $P(B_k \mid A) = \frac{P(A \cap B_k)}{P(A)} = \frac{P(A \mid B_k) \cdot P(B_k)}{P(A)} \Rightarrow$ Beh. mit (i)

Beispiel 2.4. *Trisomie 21: genetischer Defekt, verursacht Down-Syndrom*
Erkannt durch Fruchtwasseruntersuchung
in 99% der Fälle, in denen Trisomie 21 vorliegt, ist der Test positiv.
in 98% der Fälle, in denen Trisomie 21 nicht vorliegt, ist der Test negativ.

Ergebnisse:
D: Trisomie 21 liegt vor
T: Test positiv

$P(T \mid D) = 0,99$ *Sensitivität des Tests*
$P(T^c \mid D^c) = 0,98$ *Spezifität des Tests*
$\Rightarrow P(T \mid D^c) = 0,02$

Was bedeutet es, wenn der Test positiv ist?

$$P(D \mid T) \overset{Bayes}{=} \frac{P(T \mid D) \cdot P(D)}{P(T \mid D) \cdot P(D) + P(T \mid D^c} \cdot P(D^c) = \frac{1}{1 + \frac{P(T|D^c) \cdot P(D^c)}{P(T|D) \cdot P(D)}}$$

$P(D) \widehat{=}$ *relativer Häufigkeit mit der Trisomie 21 in einer Bevülkerungsgruppe auftritt.*

25 jährige Schwangere: $P(D) = \frac{1}{1250}$ $\Rightarrow P(D \mid T) \approx 0,035$
43 jährige Schwangere: $P(D) = \frac{1}{50}$ $\Rightarrow P(D \mid T) \approx 0,503$

Also ist allgemeines Screening sinnlos, falls die Erkrankungswahrscheinlichkeit sehr gering ist.

Wird A nicht von B beeinflusst $\Rightarrow P(A \mid B) = P(A)$

Definition 2.5. *(P-)Stochastisch unabhängig Sei* (Ω, P) *ein diskreter Wahrscheinlichkeitsraum. Ereignisse* $A, B \subset \Omega$ *heißen* *(P-)Stochastisch unabhängig, falls*
$P(A \cap B) = P(A) \cdot P(B)$

Definition 2.6. *(P-)Stochastisch unabhängig allgemein Ereignisse* $A_1, ..., A_n \subset \Omega$ *in einem diskreten Wahrscheinlichkeitsraum* (Ω, P) *heißen* *(P-)Stochastisch unabhängig, wenn für jede Indexmenge* $I \subset \{1, ..., n\}, I \neq \emptyset$ *gilt*
$P(\bigcap_{i \in I} A_i) = \prod_{i \in I} P(A_i)$

Bemerkung 2.7.

(i) *Definition 2.6 stellt sicher, dass jede beliebige Auswahl* $A_i, i \in I \subset \{1, ..., n\}$ *aus unabhängigen Ereignissen* $A_1, ..., A_n$ *auch wieder unabhängig sind.*

(ii) *Mehr als 2 Ereignisse* $A_1, ..., A_n$ *sind im allgemeinen* <u>*nicht*</u> *stochastisch unabhängig, wenn nur* $P(\bigcup_{i=1}^{n} A_i) = \prod_{i=1}^{n} P(A_i)$

Ist z.B. $A_1 = \emptyset$*, so gilt* $P(\overset{n}{\underset{i=1}{A_1}} = P(\emptyset) = 0 = \prod_{i=1}^{n} P(A_i)$

Ist $A_2 = A_3 = A$ *mit* $P(A) \in (0, 1)$*, so gilt*

$P(A_2 \cap A_3) = P(A) \neq P(A_2) \cdot P(A_3) = (P(A))^2$

$\Rightarrow A, A_2, A_3$ *sind* <u>*nicht*</u> *stochastisch unabhängig*

(iii) *Ebenso sind mehr als 2 Ereignisse i.d.R.* <u>*nicht*</u> *stochastisch unabhängig, wenn jeweils 2 der Ereignisse stochastisch unabhängig sind.*

Bsp.: 2 maliges Werfen eines fairen Würfels
$\Omega = \{1, ..., 6\}$, *P Laplace-Verteilung*
$A_1 = \{1, 3, 5\}x\{1, ..., 6\}$ *(Erste Augenzahl ist ungerade)*
$A_2 = \{1, ..., 6\}x\{1, 3, 5\}$ *(Zweite Augenzahl ist ungerade)*
$A_3 = \{(\omega_1, \omega_2) \in \Omega \mid \omega_1 + \omega_2 ungerade\}$ *(Summe ist ungerade)*
$= (\{1, 3, 5\}x\{2, 4, 6\} \cup \{2, 4, 6\}x\{1, 3, 5\})$

A_1, A_2 *sind stochastisch unabhängig*
A_1, A_3 *sind stochastisch unabhängig*
A_2, A_3 *sind stochastisch unabhängig*

z.B. $P(A_2 \cap B_3) = P(\{2, 4, 6\}x\{1, 3, 5\}) = \dfrac{|\{2, 4, 6\}x\{1, 3, 5\}|}{|\Omega|} = \frac{9}{36} = \frac{1}{4}$
$= \frac{1}{2} \cdot \frac{1}{2} = P(A_2) \cdot P(A_3)$
,d.h. A_2, A_3 *sind stochastisch unabhängig.*

Aber A_1, A_2, A_3 *sind* <u>*nicht*</u> *stochastisch unabhängig, denn*
$A_1 \cap A_2 \cap A_3 = \emptyset \Rightarrow P(A_1 \cap A_2 \cap A_3) = 0 \neq P(A_1) \cdot P(A_2) \cdot P(A_3) = \frac{1}{8}$

3 Zufallsvariablen und ihre Verteilungen

Oft ist nur die summarische Größe von Interesse und nicht das genau Ergebnis des Zufallsexperiments.

$\rightsquigarrow$ Abbildung $X : \Omega \to S, \emptyset \vDash S$ beliebige Menge.

——— Zeichnung ———

Urbild von B unter $X : X^{-1}(B) = \{\omega \in Omega \mid X(\omega) \in B\} =: \{X \in B\}$ Erinnerung:
$X^{-1}(A \cup B) = X^{-1}(A) \cup X^{-1}(B)$
$X^{-1}(A \cap B) = X^{-1}(A) \cap X^{-1}(B)$
$X^{-1}(A \setminus B) = X^{-1}(A) \setminus X^{-1}(B)$

Satz & Definition 3.1. *Zufallsvariable Ist* (Ω, P) *ein diskreter Wahrscheinlichkeitsraum und* $S \neq \emptyset eine beliebige Menge, so wird eine Abbildung X : \Omega \to S$ *auch S-wertige* *Zufallsvariable gennant.*

Durch $P^X(B) = P(X^{-1}(B))\ \forall B \subset S$ *wird ein Wahrscheinlichkeitsmaß auf S definiert, die sogenannte Verteilung von X.*
D.h. (S, P^X) *ist ein diskreter Wahrscheinlichkeitsraum*

Beweis: offensichtlich $P^X(B) = P(X^{-1}(B)) \in [0, 1]$
$P^X(S) = P(X^{-1}(S)) = P(\Omega) = 1$
$B_i \subset S$ disjunkt $(i \in \mathbb{N})$

$$P^X(\bigcup_{i\in\mathbb{N}} B_i) = P(X^{-1}(\bigcup_{i\in\mathbb{N}} B_i)) = P(\bigcup_{i\in\mathbb{N}} \underbrace{X^{-1}(B_i)}_{disjunkt} = \sum_{i\in\mathbb{N}} P(X^{-1}(B_i)) = \sum_{i\in\mathbb{N}} P^X(B_i),$$

d.h. es ist σ-Additiv

(Ω, P) diskreter Wahrscheinlichkeitsraum $\Rightarrow \exists \Omega_0 \subset \Omega$ abzählbar mit $P(\Omega_0) = 1$
$S_0 := X(\Omega_0) = \{X(\omega) \mid \omega \in \Omega_0\} \subset S$ abzählbar.
$P^X(S_0) = P(X^{-1}(X(\Omega_0)) \geq P(\Omega_0) = 1$
d.h. $P^X(S_0) = 1$

Beispiel 3.2. *2 maliges Werfen eines fairen WÜrfels*

Es interessiert und die Augensumme

Modell: $\Omega = \{1, ..., 6\}^2$, *P Laplace-Verteilung*
$X : \Omega \to \{2, ..., 12\} = S$

$X(\omega_1, \omega_2) := \omega_1 + \omega_2$

Verteilung von P^X von X hat Zähldichte f_X gegeben durch

$$\begin{aligned} k \in S : f_X(k) &= P^X(\{k\}) = P\{X = k\} \\ &= P\{(\omega_1, \omega_2) \in \Omega \mid X(\omega_1, \omega_2) = \omega_1 + \omega_2 = k\} \\ &= P\{(\omega_1, k - \omega_1) \mid 1 \leq \omega_1 \leq 6, 1 \leq k - \omega_1 \leq 6\} \\ &= P\{(\omega_1, k - \omega_1) \mid max(1, k-6) \leq \omega_1 \leq min(6, k-1)\} \\ &= \begin{cases} \frac{k-1}{36} & falls 2 \leq k \leq 7 \\ \frac{13-k}{36} & falls 7 \leq k \leq 12 \end{cases} \\ &= \frac{6 - |k-7|}{36} \; \forall k \in S \end{aligned}$$

Zufallsvariablen sollen als unabhängig angesehen werden, wenn alle durch sie ausdrückbaren Ereignisse stochastisch unabhängig sind.

Definition 3.3. *(P-)Stochastische Unabhängigkeit bei Zufallsvariablen Sei (Ω, P) diskreter Wahrscheinlichkeitsraum.*
Seien $X_i : \Omega \to S_i, 1 \leq i \leq n$ Zufallsvariablen.

Sie heißem (P-)Stochastisch unabhängig, wenn für beliebige $B_i \subset S_i, 1 \leq i \leq n$, die Ereignisse $\{X_1 \in B_1\}, ..., \{X_n \in B_n\}$ stochastisch unabhängig sind.

Man beobrachte: $(X_1, ..., X_n) : \Omega \to S_1 x ... x S_n$ ist eine Zufallsvariable.

Satz 3.4. *In der Situation von Definition 3.3 sind äquivalent:*

(i) $X_1, ..., X_n$ *sind stochastisch unabhängig*

(ii) $\forall B_i \subset S_i (1 \leq i \leq n) : P\{X_i \in B_i \; \forall 1 \leq i \leq n\} = \prod_{i=1}^{n} P\{X_i \in B_i\}$

(iii) Die Zähldichte $f_{(X_1,...,X_n)}$ von $P^{(X_1,...,X_n)}$ hat die Form

$$f_{(X_1,...,X_n)}(t_1, ..., t_n) = \prod_{i=1}^{n} h_i(t_i) \; \forall t_i \in S_i (1 \leq i \leq n)$$

für geeignete Funktionen $h_i : S_i \to [0, \infty)$

In dem Fall hat P^{X_i} die Zähldichte

$$f_{X_1}(t_i) = C_i \cdot h_i(t_i) \; \forall t_i \in S_i \; mit \; C_i = \frac{1}{\sum\limits_{t \in S_i} h_i(t)} \tag{3.1}$$

Beweis:
(i) $\Rightarrow$ (ii) ist klar, da $\{X_i \in B_i\}, 1 \leq i \leq n$, stochastisch unabhängig.
$\Rightarrow P(\bigcap_{i=1}^{n} \{X_i \in B_i\}) = P\{X_i \in B_i \,\forall 1 \leq i \leq n\} = \prod_{i=1}^{n} P\{X_i \in B_i\}$

(ii) $\Rightarrow$ (iii) Speziell für $B_i = \{t_i\}$

$$\begin{aligned} P\{X_i \in B_i \,\forall 1 \leq i \leq n\} = P\{X_i = t_i, \,\forall 1 \leq i \leq n\} &\overset{(ii)}{=} \prod_{i=1}^{n} P\{X_i \in B_i\} \\ &= \prod_{i=1}^{n} P\{X_i = t_i\} \end{aligned}$$

d.h. $f_{(X_1,...,X_n)}(t_1,...,t_n) = P\{(X_i,...,X_n) = (t_1,...,t_n)\} = \prod_{i=1}^{n} P\{X_i = t_i\} = \prod_{i=1}^{n} f_{X_i}(t_i)$
d.h. (iii)

(iii) $\Rightarrow$ (3.1)

$$\begin{aligned} f_{X_i}(t_i) &= P\{X_i = t_i\} \\ &= P\{X_i = t_i, X_j \in S_j, \forall j \neq i\} \\ &= \sum_{\substack{t_j \in S_j \\ j \neq i}} f_{(X_1,...,X_n)}(t_1,...,t_n) \\ &\overset{(iii)}{=} \sum_{\substack{t_j \in S_j \\ j \neq i}} \prod_{k=1}^{n} h_k(t_k) \\ &= \sum_{t_1 \in S_1} \sum_{t_2 \in S_2} ... \sum_{t_{i-1} \in S_{i-1}} \sum_{t_{i+1} \in S_{i+1}} ... \sum_{t_n \in S_n} \prod_{k=1}^{n} h_k(t_k) \\ &= h_i(t_i) \cdot \prod_{\substack{j=1 \\ i \neq j}}^{n} \left(\sum_{t_j \in S_j} h_j(t_j) \right) =: C_i \qquad \text{(Distributivgesetz)} \end{aligned}$$

Darstellung für C_i folgt aus Bedingung $\sum_{t \in S_i} f_{X_i}(t) = 1$ an Zähldichten

(iii)$\Rightarrow$(ii) O.E. $h_i = f_{X_i}$

$\forall B_i \in S_i$

$$\begin{aligned}
P\{X_i \in B_i \ \forall 1 \leq i \leq n\} &= P\{(X_1, ..., X_n) \in B_1 x ... x B_n\} \\
&= \sum_{(t_1,...,t_n) \in B_1 x ... x B_n} f_{(t_1,...,t_n)}(t_1, ..., t_n) \\
&= \prod_{i=1}^{n} \sum_{t_i \in B_i} f_{X_i}(t_i) \qquad \text{(Distributivgesetz)} \\
&= \prod_{i=1}^{n} P\{X_i \in B_i\}
\end{aligned}$$

(ii)$\Rightarrow$(i) z.Z. $\forall J \subset \{1, ..., n\}, J \neq \emptyset, \{X_j \in B_j \ \forall j \in J\} = \prod_{j \in J} P\{X_j \in B_j\}$
folgt sofort aus (ii) mit $B_i := S_i \ \forall i \in I$, denn dann $P\{X_i \in B_i\} = P(\Omega) = 1$
$\{X_j \in B_j \ \forall j \in J\} = \{X_i \in B_i \ \forall 1 \leq i \leq n\}$

Beispiel 3.5. *Zufallsexperiment mit Erfolgswahrscheinlichkeit $p \in [0,1]$ werde n-mal unabhängig durchgeführt.*

Modell: $\Omega = \{0,1\}^n$*, wobei 0 einem Misserfolg und 1 einem Erfolgt entspricht.*

Def. Wahrscheinlichkeitsmaß auf Ω mit Zähldichte
$f(\omega) = P\{(\omega_1, ...\omega_n)\} = p^{\sum_{i=1}^{n} \omega_i} \cdot (1-p)^{\sum_{i=1}^{n} (1-\omega_i)}$
(denn bei jeder Durchführung Erfolgswahrscheinlichkeit p
$\rightsquigarrow$ *Faktor p, wenn $w_i = 1$, d.h. i-tes Experiment erfolgreich*
Faktor (1-p), wenn $w_i = 0$, d.h. i-tes Experiment misserfolg)

Zufallsvariable $X_i : \Omega \to \{0,1\}, X_i(\omega) = \omega_i$. d.h.
$$X_i = \begin{cases} 0 & \text{falls i-tes Experiment} Misserfolg \\ 1 & \text{falls i-tes Experiment} Erfolg \end{cases}$$

Beh.: $X_1, ..., X_n$ sind stochastisch Unabhängig.
Denn Zähldichte von $P^{(X_1,...,X_n)}$

$$\begin{aligned}
f_{(X_1,...,X_n)}(t_1, ..., t_n) &= P\{(X_1, ..., X_n) = (t_1, ..., t_n)\} \\
&= P\{\omega \in \Omega \mid X_i(\omega) = \omega_i = t_i \ \forall 1 \leq i \leq n\} \\
&= P\{(t_1, ..., t_n)\} = p^{\sum_{i=1}^{n} t_i} \cdot (1-p)^{(1-t_i)} \\
&= \prod_{i=1}^{n} \left(p^{t_i} \cdot (1-p)^{(1-t_i)} \right)
\end{aligned}$$

hat Produktgestallt.

Zufallsvariable $Y := \sum\limits_{i=1} nX_i$, *$Y$ = Anzahl der erfolge m in n Experimenten.*
P^Y *hat Zähldichte*

$$
\begin{aligned}
f_Y(k) = P\{Y = k\} &= P\{(\omega_1, ..., \omega_n) \in \Omega \mid Y(\omega_1, ...\omega_n) = \sum_{i=1}^{n} X_i(\omega) = \sum_{i=1}^{n} \omega = k\} \\
&= \sum_{\substack{(\omega_1,...,\omega_n)\in\Omega \\ \sum\limits_{i=1}^{n}\omega_i = k}} p^k \cdot (1-p)^{n-k} \\
&= \binom{n}{k} \cdot p^k \cdot (1-p)^{n-k}
\end{aligned}
$$

denn es gibt genau $\binom{n}{k}$ *Möglichkeiten die k Stellen auszuwählen, auf denen eine 1 steht.*
Also: $P^Y = \mathcal{B}_{(n,p)}$ *: Binomialverteilung (→ Bsp 1.10.(i))*
Speziell: n=1 $\mathcal{B}_{1,p}$ *: Benoulli-Verteilung*
Also sind $X_1, ..., X_n$ *stochastisch unabhängig mit* $P^{X_i} = \mathcal{B}_{(1,p)}$

Beispiel 3.6. *Capture-Recapture-Verfahren*
Ziel: Schätze Anzahl N Fische im See
Dazu:

1. *Fange M Fische, makiere sie und lasse sie wieder frei.*

2. *Fange wieder n Fische, darunter seien m makierte.*

Annahme: Fangwahrscheinlichkeit unter 2. sei für makierte und unmakierte Fische gleich

Modell: n-mal Ziehen ohne Zurücklegen aus N Fischen und ohne Berücksichtigung der Reihenfolge.
$\Omega = \{(\omega_1, ..., \omega_n) \in \{1, ..., N\}^n \mid \omega_1 < \omega_2 < ... < \omega_n\}$
makierte Fische entsprechen den nummern 1,...,M
P Laplace-Verteilung
$X(\omega) = \sum\limits_{i=1} n 1_{\{1,...,M\}}(\omega_i)$ *: Anzahl der makierten Fische*
Erinnerung: $1_{\{1,...,M\}(\omega_1)} = \begin{cases} 1 & falls \omega_i \in \{1, ..., M\} \\ 0 & falls \omega_i \notin \{1, ..., M\} \end{cases}$

mögliche Werte von $X(\omega_i) : 0 \leq X(\omega) \leq min(M, n), n - X(\omega) \leq N - M$
$\Rightarrow$ *Wertebereich von* $X : S := \{max(0, n + M - N), ..., min(n, M)\}$

Berechne: $P\{X = m\} = \dfrac{|\{\omega \in \Omega \mid X(\omega) = m\}|}{|\Omega|}$

Es gibt genau $\binom{M}{m}$ *Möglichkeiten m makierte Fische aus M makierten Fischen zu ziehen.*
Es gibt genau $\binom{N-M}{n-m}$ *Möglichkeiten n-m nicht makierte Fische aus allen N-M nicht makierten Fischen zu ziehen.*

$$\Rightarrow P\{X = m\} = \frac{\binom{M}{m} \cdot \binom{N-M}{m-m}}{\binom{N}{n}} =: \mathcal{H}_{(N,M,n)}(\{m\})\ \forall m \in S$$

d.h. $P^X = \mathcal{H}_{(N,M,n)}$ *: hypergeometrische Verteilung*

hypergeometrische Verteilung	*: Ziehen ohne Zurücklegen*
Binomialverteilung	*: Ziehen mit Zurücklegen*
Benoulli-Verteilung	*: Spezialfall von Binomialverteilung mit n=1*

Falls n << N, dann ist Ziehen mit oder ohne Zurücklegen fast identisch.
D.h. $(H)_{(N,M,m)}\{m\} \approx \mathcal{B}_{(n,\frac{M}{N})}\{m\}\ \forall 0 \leq m \leq n$

Wir werden sehen: erwaretete Anzahl makierter Fische $= n \cdot \frac{M}{N}$.
Wobei N unbekannt ist.

Schätze für N: $X(\omega) \approx n \cdot \dfrac{M}{N} \rightsquigarrow \hat{N} := \left[n \cdot \dfrac{M}{X(\omega)} \right]$
Wobei $X(\omega)$ *die beobachtete Zahl makierter Fische ist.*

Im Fall dass die Anzahl der Experimente n groß und die Erfolgswahrscheinlichkeit p klein ist, kann $\mathcal{B}_{(n,p)}$ approximiert werden durch eine einfachere Verteilung.

Satz & Definition 3.7 (Poisson'scher Grenzwertsatz, "Gesetz der kleinen Zahlen").
Ist $p_n \in (0,1), n \in \mathbb{N}$, *so dass* $\lim\limits_{n\to\infty} n \cdot p_n = \lambda > 0$, *so gilt für* $k \in \mathbb{N}_0$

$$\lim_{n\to\infty} \mathcal{B}_{(n,p_n)}(\{k\}) = e^{-\lambda} \cdot \frac{\lambda^k}{k!} =: f_\lambda(k)$$

$f_\lambda : \mathbb{N}_0 \to [0,1]$ *ist eine Zähldichte.*
Das zugehörige Wahrscheinlichkeitsmaß $\mathcal{P}_\lambda$ *heißt Poisson-Verteilung mit Parameter* λ.

Beweis: $(1 - \frac{x_n}{n})^n \to e^{-x}$ falls $x_m \to x$

$$\mathcal{B}_{(n,p_n)}\{k\} = \binom{n}{k} \cdot p_n^k \cdot (1-p_n)^{n-k} = \frac{n\cdot(n-1)\cdot\ldots\cdot(n-k+1)}{n\cdot n\cdot\ldots\cdot n} \cdot (n \cdot p_n)^k \cdot (1 - \frac{n\cdot p_n}{n})^n \cdot (1-p_n)^{-k} \cdot \frac{1}{k!}$$
$$\xrightarrow[n\to\infty]{} \frac{\lambda^k \cdot e^{-\lambda}}{k!}$$

Summen unabhängiger Zufallsvariablen

Definition 3.8 (Falltung)**.** *Sind X, Y stochastisch unabhängige $\mathbb{R}$-wertige Zufallsvariablen auf einem diskreten Wahrscheinlichkeitsraum (Ω, P), so heißt die Verteilung P^{X+Y} der Summe $X+Y$ die Faltung von P^X und P^Y, in Zeichen $P^X * P^Y$*

Ebenso wird die Zähldichte f_{X+Y} von P^{X+Y} die Faltung der Zähldichte f_X von P^X und f_Y von P^Y gennant, i. Z. $f_X * f_Y$

Satz 3.9. *Sind in der Situtation von Def. 3.8 X und Y $\mathbb{Z}$-wertig, so gilt*
$f_X * f_Y(n) = \sum\limits_{k \in \mathbb{Z}} f_X(k) \cdot f_Y(n-k)\ \forall n \in \mathbb{Z}$

Beweis:

$$\begin{aligned} f_X * f_Y(n) &= P\{X+Y=n\} \\ &= \sum_{k \in \mathbb{Z}} P\{X=k, Y=n-k\} \\ &= \sum_{k \in \mathbb{Z}} P\{X=k\} \cdot P\{Y=n-k\} \\ &= \sum_{k \in \mathbb{Z}} f_X(k) \cdot f_Y(n-k) \end{aligned}$$

Beispiel 3.10. *Seien $\lambda_1, \lambda_2 > 0$. Dann hat $\mathcal{P}_{\lambda_1} * \mathcal{P}_{\lambda_2}$ die Zähldichte*

$$\begin{aligned} f_{\lambda_1} * f_{\lambda_2}(n) &= \sum_{k=0}^{\infty} f_{\lambda_1}(k) \cdot f_{\lambda_2}(n-k) \\ &= \sum_{k=0}^{n} e^{-\lambda_1} \cdot \frac{\lambda_1^k}{k!} \cdot e^{-\lambda_2} \cdot \frac{\lambda_2^{(n-k)}}{(n-k)!} \\ &= e^{-(\lambda_1+\lambda_2)} \cdot \frac{1}{n!} \sum_{k=0}^{n} \frac{n!}{k!(n-k)!} \cdot \lambda_1^k \cdot \lambda_2^{n-k} \\ &= e^{-(\lambda_1+\lambda_2)} \cdot \frac{1}{n!} \cdot (\lambda_1+\lambda_2)^n = f_{\lambda_1+\lambda_2}(n)\ \forall n \in \mathbb{N}_0 \end{aligned}$$

Also $\mathcal{P}_{\lambda_1} * \mathcal{P}_{\lambda_2} = \mathcal{P}_{\lambda_1+\lambda_2}$

Beispiel 3.11 (Quicksort)**.** *$x_1, ..., x_n$ sollen sortiert werden*
x_i seien alle verschieden

1. *Wähle zufällig gleichverteilt ein* x_j *aus*

2. *Ordne Zahlen* $x_i < x_j$ *links von* $x_j \rightsquigarrow X_l$ *Vektor von Zahlen* $< x_j$

3. *Ordne Zahlen* $x_i > x_j$ *rechts von* $x_j \rightsquigarrow X_r$ *Vektor von Zahlen* $> x_j$

4. *Verfahre mit* X_l *und* X_r *getrennt ebenso.*

Beispiel. 3 7 2 6 13 1

$$\begin{array}{lll}
\textit{1. Wahl 7:} & \underbrace{3\ 2\ 6\ 1}_{X_l}|7|\underbrace{13}_{X_r} & \rightsquigarrow \textit{5 Vergleiche} \\
\textit{2. Wahl 3:} & 2\ 1|3|6|7|13 & \rightsquigarrow \textit{3 Vergleiche} \\
 & 1\ 2|3|6|7|13 & \rightsquigarrow \textit{1 Vergleiche} \\
\hline
 & & \textit{9 Vergleiche}
\end{array}$$

worstcase: gewählte Zahl jeweils kleinste oder größte
Vergleiche: $(n-1)+(n-2)+...+1 = \frac{n\cdot(n-1)}{2}$

bestcase: Speziell $n = 2^k - 1$
ausgewählte Zahl jeweils mittlere

$$\begin{array}{lll}
\textit{1. Schritt} & 2^k - 2 \ \textit{Vergleiche} & \rightsquigarrow \textit{2 Blöcke mit Länge } 2^{k-1}-1 \\
\textit{2. Schritt} & 2\cdot(2^{k-1}-2) \ \textit{Vergleiche} & \rightsquigarrow \textit{4 Blöcke mit Länge } 2^{k-2}-1
\end{array}$$

$\rightsquigarrow$ *Gesamtzahl der Vergleiche:*

$$(2^k-1)+2\cdot(2^{k-1}-2)+...+2\cdot(2^2-2) = (k-2)\cdot 2^k + 2 \approx n\cdot\log_2 n$$

Später: mittlere Zahl der benötigten Vergleiche $\approx \underbrace{\frac{2}{log2}}_{\approx 2{,}09} \cdot$ *Anzahl der Vergleiche beim bestcase*

Hier: Bestimme Zähldichte der anfälligen Anzahl von Vergleichen, die benötigt werden.

Wird die Zahl jeweils zufällig gleichverteilt gewählt, so hängt die Verteilung der Anzahl von Vergleichen nur von der Anzahl n der Daten ab, nicht von der Reihenfolge.

$Z(X) =$ *Zahl der Vergleiche, um Vektor X zu sortieren*
$Z(x_1,...,x_n) = n - 1 + Z(X_l) + Z(X_r)$

Angenommen k kleinste Zahl ausgewählt:
Dann ht X_l *die Länge* $k-1$ *und* X_r *die Länge* $n-k$

Zähldichte von $Z(x_1,...,x_n)$: $f_n(m) := P\{Z(x_1,...,x_n) = m\}$ *(hängt von n ab, nicht von den genauen Werten* $x_1,...,x_n$*)*

Dann
$P\{Z(x_1,...,x_n) = l\} = P\{Z(X_l) + Z(X_r) = l - (n-1)\}$

Bei gegebenem Wert k sind $T(X_l), Z(X_r)$ stochastisch unabhängig, da Zahlen jeweils unabhängig gewählt werden.

Da jeder Wert von k mit Wahrscheinlichkeit $\frac{1}{n}$ angenommen wird, folgt

$$
\begin{aligned}
f_n(l) &= P\{Z(X_l) + Z(X_r) = l - n + 1\} \\
&= \sum_{k=1}^{n} \frac{1}{n} \cdot f_{k-1} * f_{n-k}(l - n + 1) \\
&= \frac{1}{n} \sum_{k=1}^{n} \sum_{j=0}^{\infty} f_{k-1}(j) \cdot f_{n-k}(l - n + 1 - j)
\end{aligned}
$$

$f_1(0) = 1$
$f_2(1) = 1$
$f_n, n \geq 3$ *kann wie oben rekursiv berechnet werden.*

——— PDF-Scann eines Buches mit Grafen zu berechneten Werten ————

Definition 3.12 (Markov-Kette und -Eigenschaft & Übergangswahrscheinlichkeit)**.**
Eine Folge von Zufallsvariablen $(X_n)_{n \in \mathbb{N}_0}$ von S-wertigen Zufallsvariablen (S höchstens abzählbar) heißt Markov-Kette, falls für alle $n \in \mathbb{N}, s_0, ..., s_{n+1} \in S$ mit $P\{X_n = s_n, X_{n-1} = s_{n-1}, ..., X_0 = s_0\} > 0$

$$
\begin{aligned}
&P(X_{n+1} = s_{n+1} \mid X_n = s_n, X_{n-1} = s_{n-1}, ..., X_0 = s_0) \\
&\quad = P(X_{n+1} = s_{n+1} \mid X_n = s_n) \qquad \text{(Markov-Eigenschaft)}
\end{aligned}
$$

Die Markovkette heißt homogen,falls die Übergangswahrscheinlichkeit $P_{ts} := P(X_{n+1} = t \mid X_n = s)$ für alle $n \in \mathbb{N}_0$ mit $P\{X_n = s\} > 0$ gleich sind

Bei (homogenen) Markov-Ketten hängt das zukünftige Verhalten nur vom gegenwärtigen Zustand ab, nicht von der echten Vergangenheit.

Stochastisches Verhalten einer homogenen Markov-Kette ist eindeutig bestimmt durch die Startverteilung P^{X_0} (z.B. durch die zugehörige Zähldichte $f_0(s) = P\{X_0 = s\}$) und die Übergangswahrscheinlichkeit $P_{ts}, \quad s, t \in S$

Dann z.B.

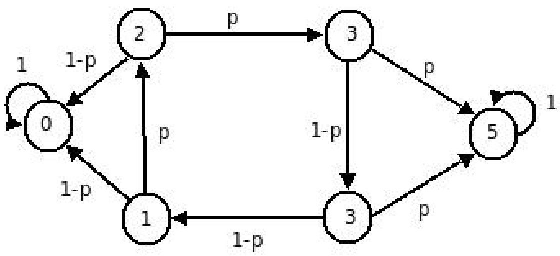
$$\begin{aligned}
P\{X_0 = s_0, X_1 = s_1, X_2 = s_2\} &= P(X_2 = s_2 \mid X_1 = s_1, X_0 = s_0) \cdot P\{X_1 = s_1, X_0 = s_0\} \\
&= P_{s_2 s_1} \cdot P(X_1 = s_1 \mid X_0 = s_0) \cdot P\{X_0 = s_0\} \\
&= P_{s_2 s_1} \cdot P_{s_1 s_0} \cdot f_0(s_0)
\end{aligned}$$

Allgemein: $P\{X_i \in A_i \; \forall 0 \leq i \leq n\} = \sum\limits_{\substack{s_i \in A_i \\ (0 \leq i \leq n)}} f_0(s_0) \cdot P_{s_0 s_1} \cdot P_{s_1 s_2} \cdot \ldots \cdot P_{s_{n-1} s_n}$

Beispiel 3.13 (Glücksspiel)**.** *Spiele A bestimmt Einsatz und wirft Münze. Falls Kopft fällt, geht der Einsatz an A, sonst an B*

Spieler A hat 1 €und braucht 5 €

"Kühne Strategie":
A setzt jeweils alles, wenn er $\leq \frac{5}{2}$*€hat, sonst die Differenz 5 €- Kapital*



z.B. $P_{5\,4} = p$, $P_{3\,4} = 1 - p$, $P_{i\,4} = 0 \, \forall i \in \{3, 5\}$
Zustände 1 und 5 hießten absorbierend.

Mit welcher Wahrscheinlichkeit erhält Spieler A schließlich 5 €?
$p_k = P(X_l = 5 \textit{für ein } l > n \mid X_n = k)$ *(Hängt nicht von n ab)*
Dann:

$$\begin{aligned}
P_1 &= P(X_l = 5 \textit{für ein } l > n | X_n = 1) \\
&= P(X_{n+1} = 2, X_l = \textit{für ein } l > n | X_n = 1) + \underbrace{P(X_{n+1} = 0, X_l \textit{für ein } l > n | X_n = 1)}_{0} \\
&= \frac{P\{X_n = 1, X_{n+1} = 2\}, X_l = 5 \textit{für ein } l > n + 1}{P\{P(X_n = 1, X_{n+1} = 2)\}} \cdot \frac{P\{X_n = 1, X_{n+1} = 2\}}{P\{X_n = 1\}} \\
&= P(X_l = 5 \textit{für ein } l > n + 1 | X_n = 1, X_{n+1} = 2) \cdot P(X_{n+1} | X_n = 1) \\
&\overset{*}{=} P(X_l = 5 \textit{für ein } l > n + 1 | X_{n+1} = 2) \; P_{2\,1} \\
&= P_2 \cdot p
\end{aligned}$$

** = Markov-Eigenschaft*

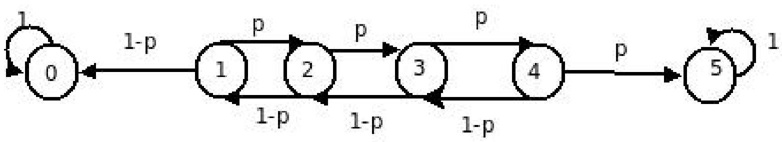
Ebenso:
$P_2 = p \cdot P_4$
$P_3 = p + (1-p) \cdot P_1$
$P_4 = p + (1-p) \cdot P_3$
lineares Gleichungssystem:

$$\underbrace{\begin{pmatrix} 1 & -p & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & -p \\ p-1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & p-1 & 1 \end{pmatrix}}_{A} \cdot \begin{pmatrix} P_1 \\ P_2 \\ P_3 \\ P_4 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ p \\ p \end{pmatrix}$$

A ist invertierbar $\Rightarrow$ *es existiert eine eindeutige Lösung* $P_1, ..., P_4$

$$P_1 = \frac{(2-p) \cdot p^3}{1 - p^2 + 2p^3 - p^4}$$

Zum Vergleich:
Vorsichtiger Spieler setzt nur 1 €



Wie oben erhällt man

$$\begin{pmatrix} 1 & -p & 0 & 0 \\ p-1 & 1 & -p & 0 \\ 0 & p-1 & 1 & -p \\ 0 & 0 & p-1 & 1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} P_1 \\ P_2 \\ P_3 \\ P_4 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ p \end{pmatrix}$$

Gleichfalls lösbar

$$P_1 = \frac{4}{1 - 3p + 4p^2 - 2p^3 + p^4}$$